

การประชุมวิชาการสถิติและสถิติประยุกต์ระดับชาติ
ครั้งที่ 12 ประจำปี 2554

เปิดโลกวิจัย
ด้วยการใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสม

“Open Network for Gaia Research Using
Appropriate Methodologies”
ONGRUAM

18 – 22 พฤษภาคม 2554
ณ โรงแรมเจบี อ.หาดใหญ่ จ.สงขลา

19 พฤษภาคม 2554	
ห้อง	13.00-13.20
ห้อง จตุ A	<p>13.20-13.40</p> <p>Inited Talk: Biostatistics in the Era of Translational Research: <i>Professor Val Gebski</i></p> <p>การพยากรณ์อัตราการมรณะของชาวออสเตรเลียโดยใช้ ตัวแบบของลี-คาร์เตอร์ร่วมกับตัวแบบการถดถอยแบบ พหุตัวแปร และวิธีพยากรณ์แบบเอ็กซ์โปเนนเชียลชนิด ถ่วงน้ำหนัก : วาสนา สุวรรณวิจิตร, คอม แม็คเคน, ธอมัส ลัมบี้ p 301</p>
Biostatistics	
ห้อง จตุ B	<p>13.40-14.00</p> <p>การประมาณค่าความยาววิงเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม ผลรวมสะสมโดยวิธีสมการปริพันธ์ เมื่อข้อมูลมีการแจก แจงแบบไวบูลล์: สุภารัตน์ ตั้งสมบูรณ์*, สุพารณ์ อารีพงษ์ และ เสาวณิต สุขการังษี p 135</p> <p>แผนภูมิควบคุมพีชซึ่งวิธีการทฤษฎีค่าสุดขีด โดยใช้ แอลฟาต้า: รังสฤษฎ์ อินทรโม* และ อติศักดิ์ พงษ์พุดผลศักดิ์ p 249</p>
Quality Control	
ห้อง หาดใหญ่	<p>การประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบ ไม่เป็นเชิงเส้นและเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวเองแบบ ความเชื่อถือได้ของซอฟต์แวร์: อัชฌาณัท รัตนเกตุสรณ์* และ วินัย โพธิ์สุวรรณ p 142</p> <p>ตัวสถิติใหม่สำหรับการตรวจสอบค่าผิดปกติโดยใช้ 2 องค์ประกอบรอง: รุ่งริวี อำนาจตระกูล* และ อำไพ ทองธีรภาพ p 218</p> <p>Reliability Analysis of Non-Repairable Multi-State System using Fuzzy Method: <i>Wimonmas Bamrungsethaphong* and Adisak Pongpullponasak</i> p 56</p>
Multivariate Analysis/Reliability	

* Speaker

การประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม
โดยวิธีสมการปริพันธ์ เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบไวบูลล์

สุภารัตน์ ตั้งสมบุญ*, ยูปาภรณ์ อารีพงษ์, เสาวณิต สุขภารังษี

The Average Run Length Evaluation for Cumulative Sum Control Chart with Integral
Equation Approach when Observations are Weibull Distribution

Suparat Tangsombun*, Yupaporn Areepong, Saowanit Sukparungsee

King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok, 10800, Thailand

* E-mail: auu_click23@hotmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษากระบวนการควบคุมคุณภาพเชิงสถิติด้วยแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum: CUSUM) สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution) กรณีที่ขนาดการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์มีขนาดเล็ก โดยเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิด้วยค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) โดยถ้ากระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (In-control process) ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยจะใช้สัญลักษณ์ ARL_0 และเมื่อกระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม (Out-of-control process) ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยจะใช้สัญลักษณ์ ARL_1 ซึ่งวิธีที่เป็นที่นิยมใช้ทั่วไป คือ วิธีจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation: MC) แต่ใช้เวลาอย่างมากในการประมวลผล ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้จึงขอนำเสนอวิธีสมการปริพันธ์ (Integral Equation: IE) โดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบเกาส์ (Gauss quadrature) ในการหาค่า ARL_0 และ ARL_1 ผลการวิจัยพบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากวิธี IE จะมีความถูกต้องแม่นยำเทียบเท่ากับวิธี MC แต่ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าวิธี MC นอกจากนี้ยังเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิ CUSUM และแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลัง (Exponential Weighted Moving Average: EWMA) พบว่าแผนภูมิ EWMA นั้นมีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิ CUSUM เมื่อการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์มีขนาดเล็ก แต่เมื่อการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์มีขนาดใหญ่พบว่าแผนภูมิ CUSUM นั้นมีประสิทธิภาพดีกว่า

คำสำคัญ: การแจกแจงแบบไวบูลล์ เกาส์ ความยาววิ่งเฉลี่ย แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม สมการปริพันธ์

Abstract

The objective of this research is to study Statistical Quality Control (SQC) with Cumulative Sum chart when observations are Weibull Distribution Magnitudes of parameter changes are investigated by comparison performance of control chart with Average Run Length (ARL). ARL_0 and ARL_1 are denoted when a process is in-control and out-of-control, respectively. A common method for evaluation ARL is Monte Carlo simulation (MC). Although, the Monte Carlo simulation is widely used for evaluation ARL, it is very time consuming. Consequently, we proposed an Integral Equation (IE) by approximation with Gauss quadrature for determining ARL_0 and ARL_1 . The results from IE method are accuracy as good as MC but the former takes CPU times much less than the latter method. Furthermore, a comparison of the performance of CUSUM and Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) charts is addressed. The EWMA performance is superior than CUSUM for the case of the small sizes of parameter changes, otherwise, CUSUM performs better than EWMA.

Keywords: Average run length, Cumulative sum control chart, Gauss quadrature, Integral equations, Weibull distribution

1. บทนำ

การควบคุมกระบวนการผลิตให้มีความสม่ำเสมอ หรือปรับกระบวนการผลิตให้มีความสามารถในการผลิตมากขึ้น รวมถึงทำให้ความผันแปรของกระบวนการผลิตลดลง จนได้ค่าคุณสมบัติของผลิตภัณฑ์ตรงตามเกณฑ์มาตรฐาน นิยมใช้แผนภูมิการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ (Statistical Process Control: SPC) โดยทั่วไปจะใช้แผนภูมิการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติในกระบวนการควบคุมการวัดปริมาณเชิงสถิติทั้งในด้านการผลิตในโรงงานอุตสาหกรรม ด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ ด้านโทรคมนาคม ด้านการคลังและเศรษฐศาสตร์ ด้านระบาดวิทยา ด้านสิ่งแวดล้อม เป็นต้น^{1,2,3} ซึ่งในการวิจัยนี้จะใช้แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum: CUSUM) เป็นแผนภูมิที่ใช้ในการตรวจจับค่าการเปลี่ยนแปลงที่มีขนาดเล็กและปานกลางได้ดี⁴ โดยทั่วไปข้อมูลที่เก็บรวบรวมจากกระบวนการผลิตมักมีการแจกแจงแบบปกติ (Gaussian Distribution) แต่ก็มีหลายกระบวนการผลิตที่ค่าสังเกตอาจมีลักษณะเป็นการแจกแจงแบบไม่ปกติ (non-Gaussian Distribution) อาทิเช่น การแจกแจงแบบไวบูลล์ เป็นการแจกแจงที่ใช้กันแพร่หลายในทางวิศวกรรมศาสตร์ โดยเฉพาะทางการทดสอบเกี่ยวกับอายุของชิ้นส่วนที่ประกอบเครื่องจักร และยังสามารถนำมาใช้เป็นตัวแบบในอายุการใช้งานของอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ เช่น อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่ทำหน้าที่ตัดต่อวงจร คล้ายกับสวิตช์ ตลับลูกปืนเม็ดกลม หรือในธุรกิจอื่น ๆ⁵

งานวิจัยครั้งนี้จึงได้ทำการศึกษากระบวนการควบคุมคุณภาพเมื่อค่าสังเกตนั้นมีการแจกแจงแบบไวบูลล์ด้วยแผนภูมิ CUSUM และมีการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ขนาดเล็ก และขอเสนอวิธี IE ในการประมาณค่า ARL สำหรับแผนภูมิ CUSUM ซึ่งใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงคือใช้วิธีการประมาณค่าแบบเกาส์ (Gauss quadrature) ในการคำนวณหาค่า ARL_0 และ ARL_1 โดยเปรียบเทียบค่า ARL_0 และ ARL_1 และเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) จากวิธี IE กับวิธีจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulations: MC) นอกจากนี้ยังศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิ CUSUM และแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลัง (Exponential Weighted Moving Average Control Chart: EWMA)

2. วัตถุประสงค์

- 2.1 เพื่อประมาณค่า ARL โดยสมการปริพันธ์ด้วยวิธี Gauss quadrature สำหรับแผนภูมิ CUSUM เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบไวบูลล์
- 2.2 เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม CUSUM และ EWMA เมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์มีขนาดแตกต่างกัน

3. ขอบเขตและวิธีการวิจัย

- 3.1 กำหนดให้ข้อมูลมีการแจกแจงแบบไวบูลล์ เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม กำหนดค่าพารามิเตอร์ $r = 2$ และ $\alpha_0 = 1$ และถ้ากระบวนการอยู่นอกเหนือการควบคุม กำหนดค่าพารามิเตอร์ $r = 2$ และ $\alpha > \alpha_0$
- 3.2 ศึกษาแผนภูมิ CUSUM โดยวิธีสมการปริพันธ์ด้วยวิธี Gauss quadrature เพื่อประมาณค่า ARL_0 และ ARL_1 เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 200$ ด้วยวิธี MC ขนาดของการจำลองเท่ากับ $n = 10^7$ ครั้ง
- 3.3 กำหนดระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์เท่ากับ $\alpha = 1.01, 1.03, 1.05, 1.07, 1.09$ และ 1.1
- 3.4 เปรียบเทียบ CPU Times สำหรับการคำนวณค่า ARL_0 และ ค่า ARL_1 ที่ได้จากวิธี MC และวิธี IE
- 3.5 เปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม CUSUM และ EWMA เมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์มีขนาดต่าง ๆ

4. ทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

4.1 แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum Control Chart: CUSUM)

Page⁷ เป็นคนแรกที่ได้นำเสนอแผนภูมิ CUSUM เพื่อเป็นแผนภูมิที่ใช้ในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ขนาดเล็กถึงปานกลาง โดยค่าสถิติ U , มีรูปแบบดังนี้⁸

$$U_t = \text{Max}[0, U_{t-1} + x_t - k]$$

เมื่อ x_t คือ ค่าสังเกตที่เก็บมา

k คือ ค่า reference value

ในงานวิจัยนี้ศึกษาเฉพาะแผนภูมิควบคุมทางเดียว ซึ่งค่าขีดจำกัดบนของแผนภูมิ (Upper control limit: UCL) จะกำหนดให้เท่ากับ h ดังนั้นจะได้เงื่อนไขของเวลาที่ค่าเฉลี่ยตัวแรกออกนอกขีดจำกัดควบคุม (Stopping times) ดังนี้

$$\tau_h = \inf \{t > 0 : U_t > h\}$$

4.2 วิธีสมการปริพันธ์ (Integral Equations Method: IE) สำหรับแผนภูมิ CUSUM

การประมาณค่า ARL โดยวิธี IE ของแผนภูมิ CUSUM โดยกำหนดให้ค่า ARL เท่ากับฟังก์ชัน $L(u)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} L(u) &= 1 \cdot P[x-k \geq h-u] + (1+L(0))P(x-k) \leq -u + \int_{k-u}^{k+h-u} (1+L(u+x-k))f(x)dx \\ &= 1 - P(x \leq k+h-u) + P(x \leq k-u) + L(0)P(x \leq k-u) + F(k+h-u) \\ &\quad - F(k-u) + \int_{k-u}^{k+h-u} L(u+x-k)f(x)dx \\ &= 1 - F(k-h-u) + F(k-u) + L(0)F(k-u) + F(k+h-u) - F(k-u) \\ &\quad + \int_0^h L(x)f(x+k-u)dx \\ &= 1 + L(0)F(k-u) + \int_0^h L(x)f(x+k-u)dx \end{aligned}$$

และจาก quadrature rule สามารถประมาณสมการปริพันธ์โดยเขียนอยู่ในรูป

$$L(u) = 1 + L(0)F(k-u) + \sum_{j=1}^n L(x_j)f(x_j+k-u)$$

5. ผลการวิจัย

จากการศึกษาเปรียบเทียบการประมาณค่า ARL_0 และ ARL_1 ของแผนภูมิ CUSUM จากวิธี MC กับวิธี IE ด้วยการประมาณค่าแบบ Gauss quadrature เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบไวบูลล์ กำหนดค่าพารามิเตอร์ $r = 2$ และ $H = 2.81$ ภายใต้การควบคุมค่าพารามิเตอร์ $\alpha_0 = 1$ โดยมีขนาดของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์เป็น $\alpha = 1.01, 1.03, 1.05, 1.07, 1.09$ และ 1.1 โดยกำหนดให้ค่า $ARL_0 = 200$ แสดงผลลัพธ์ที่ได้ในตารางที่ 5.1 โดยจะเปรียบเทียบค่า ARL_0 และ ARL_1 และเวลาที่ใช้ในการคำนวณค่า (CPU Times) ในแต่ละวิธีมีหน่วยเป็นวินาที

ตารางที่ 5.1 เปรียบเทียบค่าของ ARL_0 และ ARL_1 ที่ได้จากจำนวนค่าด้วยวิธี MC และ IE เมื่อกำหนดให้

$$r = 2, H = 2.81, n = 10^5 \text{ และ } ARL_0 = 200$$

A	Monte Carlo Simulations		Integral Equations Method	
	ARL	CPU Times (sec.)	ARL	CPU Times (sec.)
1	200.401±0.608*	1124.100	199.270	42.167
1.01	169.567±0.515*	953.509	169.274	42.167
1.03	125.845±0.375*	712.707	125.368	41.980
1.05	95.654±0.282*	542.852	95.857	19.906
1.07	75.600±0.217*	429.705	75.416	19.740
1.09	60.946±0.170*	343.748	60.856	8.424
1.1	55.252±0.152*	311.534	55.137	4.750

* ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

จากตารางที่ 5.1 พบว่าเมื่อเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) และค่า ARL_0 และ ARL_1 ที่ได้จากวิธี IE นั้นถูกต้องเทียบเท่ากับผลลัพธ์ที่ได้จากวิธี MC แต่ใช้เวลาน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับวิธี MC

ตารางที่ 5.2 เปรียบเทียบค่าของ ARL_0 และ ARL_1 ที่ได้จากคำนวณค่าด้วยวิธี IE ของแผนภูมิ CUSUM และ MC ของแผนภูมิ EWMA เมื่อกำหนดให้ $n = 10^5$ และ $ARL_0 = 500$

(k, α)	CUSUM	EWMA
	Integral Equations Method	Monte Carlo Simulations
	r=2, H=3.6695	$\lambda = 0.01, H = 0.9351$
(2,1.0)	499.574	499.577±0.504*
(2,1.05)	187.654	136.815±0.178*
(2,1.1)	91.809	69.386±0.051*
(2,1.2)	37.044	33.198±0.091*
(2,1.3)	21.746	21.686±0.011*
(2,1.4)	15.247	16.142±0.008*
(2,1.5)	11.753	12.896±0.005*
(2,1.6)	9.590	10.769±0.004*
(2,1.7)	8.126	9.268±0.003*
(2,1.8)	7.070	8.153±0.003*
(2,1.9)	6.273	7.293±0.003*
(2,2.0)	5.650	6.609±0.003*

* ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

จากตารางที่ 5.2 เมื่อเปรียบเทียบค่า ARL ของแผนภูมิ CUSUM ด้วยวิธี IE และแผนภูมิ EWMA ด้วยวิธี MC กำหนดให้ค่า $ARL_0=500$ พบว่าเมื่อ $\alpha \leq 1.3$ ค่า ARL_1 ของแผนภูมิ EWMA ต่ำกว่าแผนภูมิ CUSUM และเมื่อ $\alpha > 1.3$ ค่า ARL_1 ของแผนภูมิ CUSUM ต่ำกว่าแผนภูมิ EWMA

6. สรุปผลและข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยพบว่า การประมาณค่า ARL_0 และ ARL_1 โดยวิธี IE ด้วยวิธี Gauss quadrature สำหรับแผนภูมิ CUSUM เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบไวบูลล์นั้นจะให้ค่าประมาณถูกต้องเทียบเท่ากับผลลัพธ์ที่ได้จากวิธี MC แต่เวลาที่ใช้ในการคำนวณแตกต่างกันมาก ซึ่งเวลาที่ใช้จากวิธี IE ใช้เวลาในการคำนวณสูงสุดไม่เกิน 1 นาทีต่อ 1 กรณีศึกษา ซึ่งได้ผลลัพธ์ดีเทียบเท่ากับผลลัพธ์จากวิธี MC

สำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิ CUSUM และ EWMA นั้นพบว่าเมื่อขนาดเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์มีขนาดเล็กแผนภูมิควบคุม EWMA จะมีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม CUSUM แต่เมื่อขนาดเปลี่ยนแปลงมีขนาดปานกลางถึงใหญ่แผนภูมิควบคุม CUSUM จะมีประสิทธิภาพดีกว่า

เอกสารอ้างอิง

1. Mason, B., and Antony, J., Statistical Process Control: an Essential Ingredient for Improving Service and Manufacturing Quality, *Managing Service Quality*, 2000; 10(4): 233-238.
2. Ergashev, B.A., On a CAPM Monitoring based on the EWMA Procedure, *In working paper 2003; Presented at 9-th International Conference of the Society for Computational Economics and Finance*.
3. Golosnoy, V., and Schmid, W., EWMA Control Charts for Monitoring Optimal Portfolio Weights, *Sequential Analysis*, 2006; 26: 195-224.
4. Brook, D., and Evans, D.A., An Approach to the Probability Distribution of Cusum Run Length, *Biometrika*, 1972; 59: 539-548.
5. Hahn, G. J., and Shapiro, S. S., *Statistical Models in Engineering*, John Wiley, New York, 1967.
6. Page, E.S., Continuous Inspection Schemes, *Biometrika*, 1954; 41: 100-114.
7. Hawkins, D.M., and Olwell, D.H., *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*, Springer Verlag, New York, 1998.